Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 8

Jetzt haben wir mit der Analysis von Funktionen mehrerer Variablen angefangen. In der Dimension 1 waren natürliche Definitionsbereiche Intervalle (offene, abgeschlossene oder halboffene, beschränkte oder unbeschränkte). In höheren Dimensionen ist die Auswahl deutlich größer. Deshalb haben wir einige Eigenschaften der Mengen in $\mathbb{R}^n$ eingeführt.

Die Konzepte der Konvergenz und Stetigkeit einer Funktion lassen sich in die höheren Dimensionen übertragen: Es handelt sich um das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes. Wir haben erwähnt, dass es genügt, das Verhalten entlang einer beliebigen Folge zu betrachten. (Man muss aber wirklich alle gegen den betrachteten Punkt konvergenten Folgen berücksichtigen!)

Für die Untersuchung der Extrema solcher Funktionen werden wir den folgenden Begriff aus der linearen Algebra benötigen: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv* (bzw. *negativ*) *definit*, falls für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ der Ausdruck $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$ positiv (bzw. negativ) ist. Nimmt dieser Ausdruck positive und negative Werte an, so heißt die Matrix *indefinit*.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 27. und 28. Juni in den Übungen besprochen.

1. Zeigen Sie Folgendes: Eine symmetrische Matrix ist positiv (bzw. negativ) definit genau dann, wenn alle ihre Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind. Sie ist indefinit genau dann, wenn sie positive und negative Eigenwerte hat.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 2. Juli 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix Λ, so dass $A = Q\Lambda Q^T$.

2. Beweisen Sie die nachstehenden Behauptungen für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^n$:

(a) $\partial M = \partial(\mathbb{R}^n \setminus M)$,

(b) M ist offen genau dann, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen ist.

3. Es seien

$$\begin{aligned} M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 2x+1\}, & Q &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2 - 1\}, \\ N &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > -x\}, & R &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le 0\}, \\ P &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2y > x+3\}. \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die Mengen $M \cap N \cap P$ und $Q \cap R$.

(b) Untersuchen Sie, ob diese beschränkt, offen oder abgeschlossen sind.

(c) Bestimmen Sie die Inneren, die Ränder und die Abschlüsse der beiden Schnittmengen.

4. Untersuchen Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit.